به نام خدا

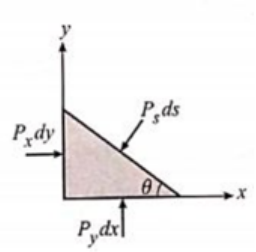
مکانیک سیالات

طاهره کاظمی

فصل دوم

محاسبه فشار

تنش فشاری در سیال ساکن



$dy = ds \cos\theta \quad , \quad dx = ds \sin\theta$

$Px = Py = Ps$ ⟸ قانون پاسکال در حالت دوبعدی

⇓

تنش های فشاری در همه جهت یکسانند

$Px = Py = Pz = Ps$ ⟸ قانون پاسکال در حالت سه بعدی

تعاریف فشار:

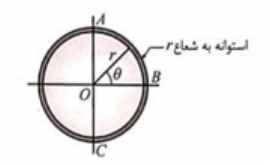
$$\bar{P} = \frac{F}{A} \Longleftarrow$$ فشار متوسط

$$P = \frac{dF}{dA} \Longleftarrow$$ فشار وارد بر یک نقطه

$$F = \int P\, dA \Longleftarrow$$ نیروی فشاری وارد بر یک صفحه تخت

سیال ساکن

مثال۱: توزیع فشار ناشی از حریان، در قطعه ABC از پیرامون استوانه نشان داده شده در شکل، با رابطه $p = 2\rho\,(1 - 4\,sin^2\theta) + 500$ مشخص گردیده است. در این رابطه ρ عددی ثابت است و P برحسب پاسکال می‌باشد. چنانچه طول استوانه برابر ۲ متر باشد، نیروی وارد به قطعه ABCو نیز فشار متوسط در این قطعه را محاسبه کنید.



$df = P\,dA \Longrightarrow df = P\,(2\,r\,d\theta) = 2\,P\,r\,d\theta$

$dFx = 2\,P\,r\cos\theta\,d\theta \quad , \quad dFy = 2\,P\,r\sin\theta\,d\theta$

$$Fx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\,[2\rho\,(1 - 4\,sin^2\theta) + 500]\,r\cos\theta d\theta = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [4\rho r\,cos\theta - 16\rho r sin^2\theta\,cos\theta + 1000 r cos\theta]\,d\theta$$

$$Fx = 2[4\rho r\,sin\theta - \frac{16}{3}\rho r sin^3\theta + 1000 r sin\theta]_{0}^{\frac{\pi}{2}} \Longrightarrow Fx = 2\,r\,[1000 - \frac{4}{3}\rho]$$

$Fy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\,[2\rho\,(1-4\sin^2\theta)+500]\,r\sin\theta d\theta = 0$ چون تابع مربوطه فرد می‌باشد پس انتگرال روبرو برابر صفر می‌شود.

$Fx = 2r\,[1000\frac{4}{3}\rho]$

$Fy = 0$

$\Rightarrow \quad F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2} = 2r\,[1000\frac{4}{3}\rho]$

$\overline{P} = \frac{F}{A} \quad \Rightarrow \quad \overline{P} = \frac{2r\,[1000-\frac{4}{3}\rho]}{2\pi r}$

فشار در مایعات (سیالات تراکم ناپذیر)

$\vec{f} = -\nabla P = -(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k})$ ساکن بودن المان $\Rightarrow \begin{matrix} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \frac{dp}{dy} = -\gamma$

انتگرال گیری $\Rightarrow \quad dp = -\gamma\,dy \longrightarrow P - P_0 = -\int_{y0}^{y} \gamma\,dy \longrightarrow P - P_0 = -\int_0^y \gamma\,dy$

$Y \longrightarrow h$
$Y_0 \longrightarrow 0$
$dy \longrightarrow dh$

$\Rightarrow \quad P - P_0 = -\int_0^h \gamma\,dh \quad \Rightarrow \quad P - P_0 = \gamma h \longrightarrow P = P_0 + \gamma h$

نکته :

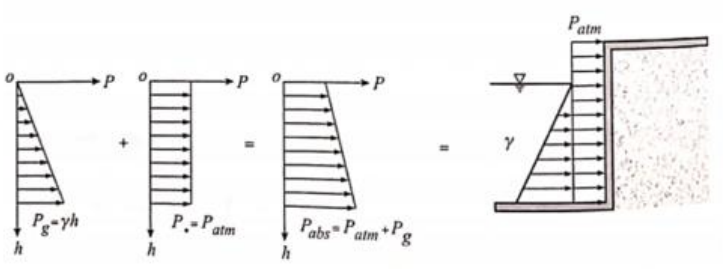
$P_{abs} = P_{atm} + P_g$

$P_g = \int_0^h \gamma \, dh = \gamma h$

P_{abs} - فشار نسبت به صفر مطلق

P_{atm} - فشار اتمسفر محلی

$P_g = P - P_0$ - فشار نسبی



واحد های اندازه گیری فشار:

pa (پاسکال) , atm(اتمسفر) , psi

1 atm $\xrightarrow{\times 101325}$ pa $\xrightarrow{\times 1.45 \times 10^{-4}}$ psi

1 atm = 101325 pa = 1.47 psi = 760 mmHg

نکته: بیان فشار برحسب ارتفاع ستون مایع:

$P = S_{Hg} \gamma_w h \qquad (mmHg)$

چگالی نسبی $S = \frac{\gamma}{\gamma_w}$

مثال ۲: فشار مطلق در نقطه ای به عمق ۲ متر از سطح آزاد مایعی با چگالی نسبی ۱.۵ را تعیین کنید. فشار اتمسفر محلی ۵۰۰ میلیمتر جیوه است. (چگالی نسبی جیوه ۱۳.۶ و $g=10\,m/s2$)

$Patm = S_{Hg} \gamma_w h = 13.6 \times 10 \times 500 = 68000\,pa$

$Pg = \gamma h = 1.5 \times 10000 \times 2 = 30000\,pa$

$Pabs = Patm + Pg = 68000 + 30000 = 98000$

نکته : اختلاف فشار بین دو نقطه :

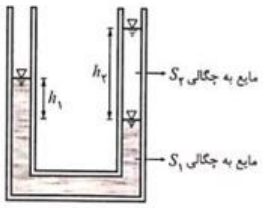
تابعی از فاصله عمودی آنهاست.

$P_A = \gamma hA$

$P_B = \gamma hB$

$\longrightarrow PA - PB = \gamma (hA - hB) \longrightarrow \Delta PAB = \gamma \Delta hAB$

مثال ۳: دو مایع مخلوط نشدنی به چگالی S1 و S2 مطابق شکل درون یک لوله U شکل به حالت تعادل قرار دارند. ارتفاع مایع به چگالی S2 درون لوله U شکل را تعیین کنید.



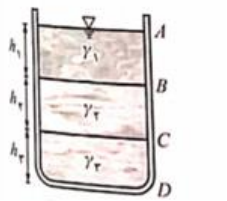
فشار در سمت چپ = P1

فشار در سمت راست = P2

$$\longrightarrow P1=P2 \longrightarrow S1\,\gamma w\,h1 = S2\,\gamma w\,h2 \longrightarrow \boldsymbol{h2} = \frac{S1}{S2}\,\boldsymbol{h1}$$

نکته: محاسبه فشار در دو یا چند مایع مخلوط نشدنی:

در اختلاط این گونه مایعات، مایع سنگین تردر پایین و مایع سبک تر در بالا قرار می‌گیرد و فشار نسبی مانند زیر به دست می آید.



$PA = Patm = 0$

$PB = \gamma 1\,h1$

$Pc = \gamma 1\,h1 + \gamma 2\,h2$

$PD = \gamma 1\,h1 + \gamma 2\,h2 + \gamma 3\,h3$

محاسبه فشار در گازها (قانون گاز کامل):

$P\,Vs = R\,T$

P = فشار مطلق گاز کامل بر حسب پاسکال

Vs = حجم مخصوص گاز $\quad m3/kg \quad Vs = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$ $\quad$ m = جرم گاز

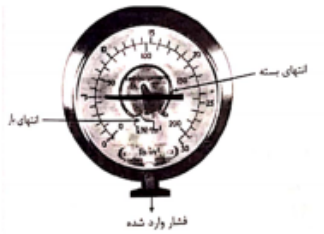
T = دمای گاز بر حسب کلوین (دمای مطلق گاز)

R = ثابت گاز $\quad m.N/kg.K \quad R = \frac{8312}{M}$ $\quad$ M = جرم مولکولی

$$P\,Vs = R\,T \;, Vs = \frac{V}{m} \longrightarrow P = \frac{mRT}{V}$$

$$P\,Vs = R\,T \;, Vs = \frac{1}{\rho} \longrightarrow P = \rho\,R\,T$$

وسایل اندازه گیری فشار:



فشارسنج بوردون:

نکته : عدد نشان داده شده توسط عقربه فشارسنج بوردون، میزان بیشتر بودن فشارداخل لوله را نسبت به خارج آن (یعنی محیط قرارگیری فشارسنج) نشان می هد. حال اگر محیطی که فشارسنج در آن قرار دارد هوای آزاد باشد، در آن صورت فشارسنج بوردون، فشار نسبی را نشان خواهد داد.

بارومتر خشک : برای اندازه گیری فشار اتمسفر محلی به کار می رود و مانند فشارسنج بوردون کار می کند با این تفاوت که در این حالت، لوله تخلیه و درزبندی شده است.

بارومتر جیوه ای : مانند بارومتر خشک فشار اتمسفر محلی را اندازه گیری می کند. بارومتر جیوه ای لوله ای شیشه ای است که یک طرف آن بسته می باشد که پس از پر کردن با جیوه واردونه کرده و انتهای آن را در ظرف جیوه غوطه ور می کنند.

$$hA\ (mmHg) = R + hv$$

hA : فشار اتمسفر

hv : تابع دماست اما مقدارش در دماهای معمولی بسیار کوچک است، به نحوی که می توان نادیده گرفت.

مثال۴ : یک فشارسنج بوردون خلا نسبی ۱۳.۶ kpa را نشان می دهد. اگر بارومتر جیوه ای نیز عدد ۷۵۰ mm را نشان دهد، فشار مطلق چند میلی جیوه خواهد بود؟ ($g=10m/s2$ چگالی نسبی جیوه ۱۳.۶)

$$Pg = -13.6\ kpa = SHg\,\gamma\,hg \longrightarrow hg = \frac{Pg}{SHg\gamma} = -\frac{13.6\times10^3}{13.6\times10} = -100\ mmHg$$

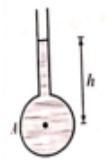
$$hatm = 750\ mmHg$$

$$habs = hatm + hg = 750 - 100 = 650\ mmHg$$

وسایل اندازه گیری فشار:

پیزومتر:

برای اندازه گیری فشارهای نسبی مثبت و کم درمایعات استفاده می شود. سطح آزاد ساکن در مجاورت هوای آزاد و فشار نسبی مایع در هر نقطه از مخز را می توان به پیزومتر محاسبه کرد.

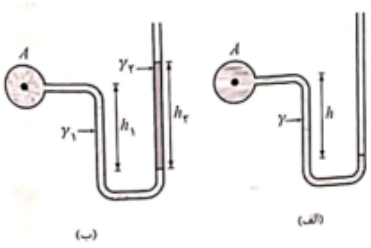


$$PA = \gamma h$$

مانومتر ساده :

مانومتر شکل الف) برای اندازه گیری فشارهای نسبی مثبت و منفی کم در مایعات

مانومتر شکل ب) علاوه بر اندازه گیری فشارنسبی مثبت و منفی، به دلیل داشتن مایع مانومتری، فشار های زیاد را نیز اندازه گیری میکند.



روش محاسبه فشار در مانومتر:

۱- از یک طرف مانومتر شروع کرده و فشار نقطه اولیه را محاسبه میکنیمک

۲- از نقطه اولیه در طول مانومتر حرکت کرده تا به سطح مشترک سیال بعدی برسیم. (اگر سطح مشترک بعدی پایین تر بود، تغییر فشار مثبت و اگر بالاتر بود منفی می باشد)

۳- مرحله دوم را تا رسیدن به طرف دیگر مانومتر ادامه می دهیم.

۴- در نقطه آخر، عبارت حاصله در طی مراحل قبل را با فشار در این نقطه، چه معلوم و چه مجهول، برابر قرار می دهیم.

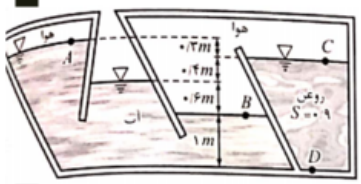
نکته :

در پیزومتر فشار در عرض پیزومتر یکسان است.

فرمول محاسبه فشار نسبی در پیزومتر ها:

پیزومتر الف)
$$PA + \gamma h = Patm = 0 \longrightarrow PA = -\gamma h$$

پیزومتر ب)
$$PA + \gamma 1h1 - \gamma 2h2 = Patm = 0 \longrightarrow PA = \gamma 2h2 - \gamma 1h1$$



مثال۵ : برای شکل روبرو، فشار در نقاط A وB و C و D را برحسب کیلو پاسکال بدست آورید.

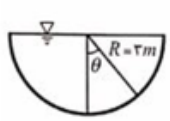
$$PA + (0.3 + 0.4) \times 10 = Patm = 0 \longrightarrow PA = -7\ kpa$$

$$PB - 0.6 \times 10 = Patm = 0 \longrightarrow PB = 6\ kpa$$

$$Pc = PB = 6\ kpa$$

$$PD - (1 + 0.6 + 0.4) \times (10 \times 0.9) = PC \longrightarrow PD = 24kpa$$

نمونه سوال



۱- توزیع فشار ناشی از جریان در جداره کانال نشان داده شده در شکل، با رابطه $P = 500\ (3 + SIN^2\theta)$ مشخص شده است. اگر در این رابطه P بر حسب پاسکال باشد، مقدار نیروی وارد بر واحد طول این کانال چند کیلو نیوتن بر متر است؟ فشار متوسط وارد بر جداره کانال چقدر است؟

$$P = \frac{dF}{dA} \qquad dF = PdA = 500\,(3+\sin^2\theta) \times (1 \times 2d\theta) = 1500\,(3+\sin^2\theta)\,d\theta$$

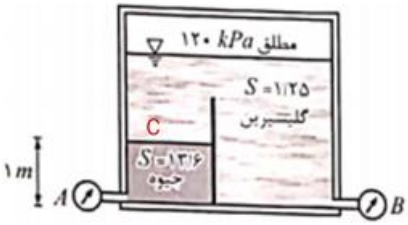
$$dFx = PdA\sin\theta = 1500\,(3+\sin^2\theta)\sin\theta\,d\theta \longrightarrow Fx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1500\,(3+\sin^2\theta)\sin\theta\,d\theta = 0$$ تابع فرد

$$dFy = PdA\cos\theta = 1500\,(3+\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta \longrightarrow Fy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1500\,(3+\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$ تابع زوج

$$Fy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1500\,(3+\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta = 3000\left[3\sin\theta + \frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 10000\,N = 10\,KN$$

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2} = 10\,KN$$

نمونه سوال



۲- فشار مطلق در فشارسنج A برابر258 kpa است. اگر بارومتر فشار استاندارد محلی را 101.5 kpa نشان دهد، فشار نسبی در نقطه B برحسب کیلوپاسکال را محاسبه کنید.
$(\gamma w = 10\,KN/m3)$

$(Pabs)A = 258\,kpa$, $Patm = 101.5\,kpa$

$$(P\,abs)A = Patm + (Pg)A \longrightarrow (Pg)A = 258 - 101.5 = 156.5\ kpa$$

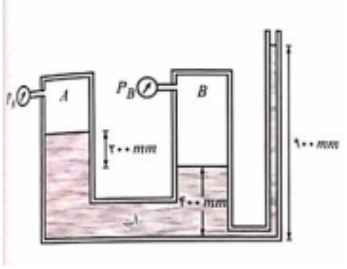
روش اول :

$$PA - 13.6 \times \gamma w \times 1 = PC \longrightarrow PC = 156.5 - 136 = 20.5\,kpa$$
$$PC + 1.25 \times 10 \times 1 = PB \longrightarrow PB = 20.5 + 12.5 = 33\,kpa$$

روش دوم :

$$PA - 13.6 \times \gamma w \times 1 + 1.25\,\gamma w \times 1 = PB$$
$$PB = 156.5 - 136 + 12.5 = 33\,kpa$$

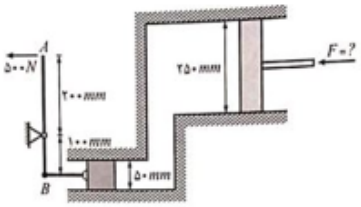
نمونه سوال



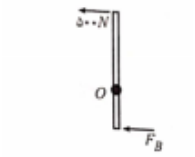
۳ - در شکل زیر اختلاف فشار اندازه گیری شده توسط فشارسنج ها چه مقدار است؟

$$\Delta P_{AB} = \gamma w \, \Delta h_{AB} = 10 \times 0.2 = 2 \ \ kpa$$

نمونه سوال



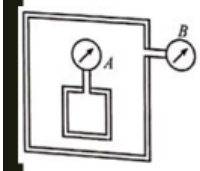
۴ - مطابق شکل نیروی 500 N در نقطه A به اهرم AB وارد می شود. انتهای دیگر اهرم (B) به پیستونی متصل شده که در داخل یک سیلندر به قطر 50 mm قرار گرفته است. به پیستون باید چه نیرویی اعمال شود تا از حرکت آن در سیلندر با قطر 250 mm جلوگیری کند؟ (از وزن مایع درون سیلندر صرف نظر شود.)



$$\sum Mo = 0 \longrightarrow 500 \times 200 = FB \times 100 \longrightarrow FB = 1000\,N$$

$$F2 = F1\left(\frac{D2}{D1}\right)^2 = 1000\left(\frac{250}{50}\right)^2 = 25000\,N = 25\,KN$$

نمونه سوال



۵- در شکل زیر فشار سنج قرار گرفته در مخزن A عدد 75 Kpa و فشارسنج B عدد 100 Kpa رانشان می دهد. اگر فشار اتمسفر محلی برابر 105 Kpa باشد، فشار مطلق و نسبی مخزن A چندکیلو پاسکال می باشند؟

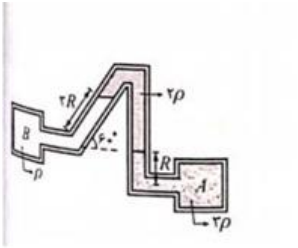
$(P_{abs})A = (P_g)A + (P_{abs})B \longrightarrow (P_{abs})A = (P_g)A + (P_g)B + P_{atm}$

$(P_{abs})B = (P_g)B + P_{atm}$

$\longrightarrow (P_{abs})A = 75 + 100 + 105 = 280\,kpa$

$\longrightarrow (P_{نسبی})A = (P_{abs})A - P_{atm} = 280 - 105 = 175\ kpa$

نمونه سوال

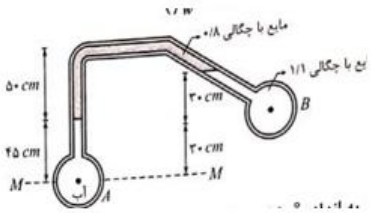


۶- در شکل زیر اختلاف فشار بین دو مخزن A و B چقدر است؟

$P_B - \rho g(2R\sin 60) + 2\rho g(2R\sin 60) + 3\rho g(R) = P_A$

$P_A - P_B = 3\rho Rg + 2\sqrt{3}\,\rho Rg - \sqrt{3}\,\rho Rg = (3+\sqrt{3})\rho Rg$

نمونه سوال

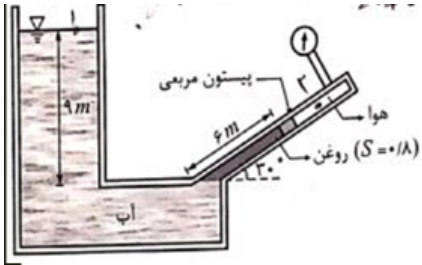


۷ - اختلاف فشار مراکز دو مخزن A و B در شکل زیر چند است؟

$$PA - \gamma w \times 0.45 + 0.8 \times 10\,(0.6 - 0.45) + (1.1 \times 10)\,(0.3) = PB$$

$$PA - PB = 2.5\ kpa$$

نمونه سوال



۸- در شکل زیر برای تعادل پیستون مربعی (0.6 m * 0.6 m)، فشار نسبی هوای محبوس چقدر باید باشد؟ از وزن پیستون صرف نظر می شود و $\gamma w = 10$ Kn/M3 است.

پیستون یک طرف به سمت روغن (Pb) و یک طرف به سمت هوا:

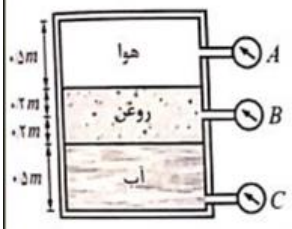
$$Pb + 0.8 \times 10 \times 6 \sin 30 - 10 \times 9 = Patm = 0$$

$$P\,b = 66\ kpa$$

برای تعادل تنها کافی است فشار دو طرف پیستون برابر باشند.

$$Pt = Pb = Pair = 66\ kpa$$

نمونه سوال



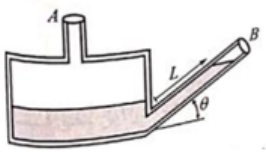
۹- در شکل زیر فشارسنج A عدد 10 kPa را نشان می دهد. اگر فشارسنج B فشار را به اندازه 6.6 kPa کمتر از فشارسنج C نشان دهد، عدد قرائت شده توسط فشارسنج c کدام است؟ ($\gamma w = 10\ Kn/M3$)

$Pc - PB = 6.6\ kpa$

$PB + \gamma oil \times 0.2 + \gamma w \times 0.5 = Pc \longrightarrow Pc - PB = 5 + 0.2\,\gamma oil = 6.6 \longrightarrow \gamma oil = 8\ kN/m3$

$Pc - \gamma w \times 0.5 - \gamma oil \times 0.4 = PA = 10 \longrightarrow Pc = 10 + 10 \times 0.5 + 8 \times 0.4 = 18.2\ kpa$

نمونه سوال



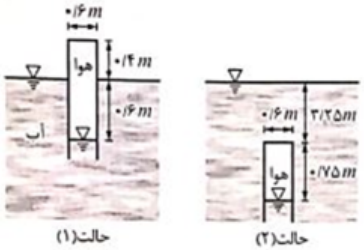
۱۰ – یک مانومتر مطابق شکل زیر با زاویه $\theta=30$ و محتوی آب، به عنوان مانومتر ساده، برای اندازه گیری فشار به کار می رود. مخزن متصل به مانومتر بزرگ است و می توان فرض کرد که ارتفاع سطح آن ثابت می ماند. انتهای B از لوله مایل در تماس با هوای آزاد است. اگر $L=40\ cm$ باشد، فشار در مقطع A (در لوله متصل به بالای مخزن) برحسب سانتیمتر ستون آب چقدر است؟

در تماس با هوای آزاد : $P = Patm = 0$

$PA - \gamma w\, L \sin\theta = PB = Patm = 0 \longrightarrow \frac{PA}{\gamma w} = L \sin\theta = 40 \sin 30 = 20\ cm$

نمونه سوال

۱۱- یک استوانه را که در بالای آن هوا محبوس شده است، در دو وضعیت در داخل آب قرار می دهیم. در حالت اول استوانه در سطح شناور بوده و در حالت دوم آن را به صورت کامل داخل آب فرو می بریم. اگر دمای هوای محبوس داخل استوانه در حالت (۱) و (۲) یکسان باشد، فشار اتمسفر محلی چند کیلو پاسکال است؟ ($\gamma w = 10\ KN/m3$)



$$P\,V = m\,R\,T$$
$$mR = constant$$
$$T = constant$$
$$\longrightarrow \quad P1\,V1 = P2\,V2$$

$$P1 = 0.6 \times \gamma w + Patm = 6 + Patm$$

$$P2 = Patm + (3.25+0.75)\,\gamma w = Patm + 40$$

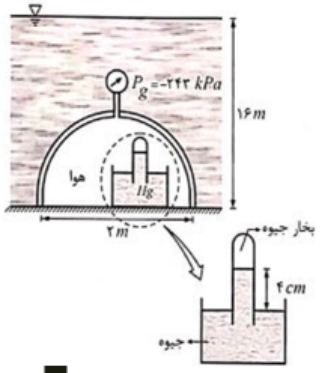
$$V1 = Ah1 = (0.4 + 0.6)\,A = A$$

$$V2 = Ah2 = 0.75\,A$$

$$(6 + Patm)A = (40 + Patm)\,0.75\,A \longrightarrow Patm = 96\ Kpa$$

نمونه سوال

۱۲- یک پوسته جدار نازک در کف دریاچه ای ($\gamma w = 10\ kN/m3$) قرار گرفته است. فشار داخل پوسته توسط بارومتر جیوه ای و اختلاف فشار داخل و خارج پوسته توسط فشارسنج بوردون اندازه گیری شده است. با توجه به اطلاعات به دست آمده، فشار اتمسفر روی سطح دریاچه چقدر است؟ (فشار بخار جیوه معادل ۳.۶kpa بوده و چگالی نسبی جیوه $SHg = 13.5$ است.)



فشار هوای داخل پوسته با توجه به قرائت بارومتر جیوه ای :

$$P\text{هوا} - \gamma Hg \times h0 = P\text{بخارجیوه} \longrightarrow P\text{هوا} = 3.6 + (13.5 \times 10) \times 0.04 = 9\ kpa$$

فشار مطلق با استفاده از فشار قرائت شده توسط فشار سنج بوردون :

$$Pg = -243$$

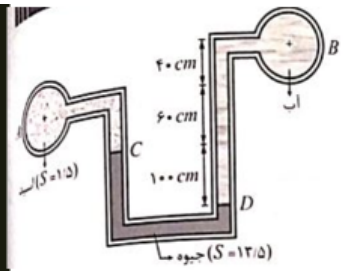
$$Pabs = P\text{هوا} - Pg = 9 - (-243) = 252$$

فشار اتمسفر به شکل زیر محاسبه می شود:

$$Pabs = Patm + \gamma h \longrightarrow Patm = 252 - 10 \times (16 - 1) \longrightarrow Patm = 102\ kpa$$

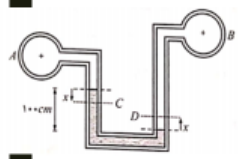
نمونه سوال

۱۳- اگر در شکل روبه رو فشار در مخزن A به اندازه 61.25 kpa افزایش یابد و فشار در مخزن B تغییری نکند، اختلاف ارتفاع جدید نقاط C و D چند سانتیمتر خواهد بود؟ ($\gamma w = 10$ (KN/m3



فشار و قبل از افزایش فشار

$$PA + 1.5\times10\times0.6 + 13.5\times10\times1 - 10\times2 = PB \longrightarrow PB - PA = 124\,kpa$$



$$PA2 = PA + 61.25$$

$$PB - PA2 = 124 \longrightarrow PB - PA + 61.25 = 124 \longrightarrow PA - PB = 124 - 61.25 = 62.75\,kpa$$

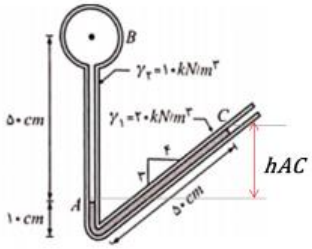
$$PA + (0.6 + X)\times1.5\times10 + (1 - 2X)\times13.5\times10 - (2 - X)\times10 = PB$$

$$\left.\begin{array}{l} PB - PA = 124 - 245X \\ PB - PA = 62.75 \end{array}\right\} \longrightarrow 124 - 245X = 62.75 \longrightarrow X = \frac{1}{4} = 0.25\ m$$

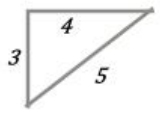
$$CD = 100 - 2\,(25) = 50\,cm = 0.5\,m$$

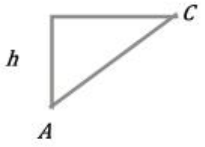
نمونه سوال

۱۴-مقدار فشار در مرکز لوله (B) چقدر است؟



$$PB + \gamma2\times0.5 - 0.2\times\gamma1 = Patm = 0 \longrightarrow PB + 5 - 4 = 0 \longrightarrow PB = -1\,kpa$$





$$\frac{h}{3} = \frac{AC}{5}$$

$$h = 50\times\left(\frac{3}{5}\right) = 30\,cm \longrightarrow hAC = 30 - 10 = 20$$